Практическое занятие 4.

Формула полной вероятности
Формулы Байеса

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей является, так называемая, формула полной вероятности.

Пусть событие А может произойти с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных событий и называемых г и п о т е з а м и .

Тогда событие А может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез:

$$A=H_1\cdot A+H_2\cdot A+\ldots+H_n\cdot A.$$

Так как гипотезы H_i несовместны, то и комбинации $H_i\cdot A$ также несовместны:

$$P(A)=P(H_1\cdot A)+ P(H_2\cdot A)+\ldots P(H_n\cdot A).$$

События H_i и А зависимы, причём появление событий H_i влечёт за собой появление события А. Применяя к событиям $H_i\cdot A$ теорему умножения, получим ф о р м у л у п о л н о й в е р о я т н о с т и :

$$P(A)= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i), \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$$

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является, так называемая, теорема гипотез или формулы Байеса.

Имеется полная группа гипотез H_i. Вероятности этих гипотез известны до опыта и соответственно равны $P(H_i)$. Произведён опыт, в результате которого появилось событие А. Спрашивается, как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением события А? Иными словами следует найти условные вероятности $P(H_i/A)$, $i=1, \overline{n}$.

Из теоремы умножения имеем формулы:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \; i=\overline{1,n},$$

которые называются ф о р м у л а м и Б а й е с а .

Появление события А вызывает п е р е о ц е н к у вероятностей гипотез.

П р и м е р 1 . Работа прибора контролируется двумя регуляторами. При наличии обеих регуляторов прибор отказывает с регулярностью 0,02, при работе только первого регулятора – с вероятностью 0,1, при работе только второго – с вероятностью 0,2, при отказе обеих регуляторов – 0,2. Первый из регуляторов имеет надёжность 0,95, второй- 0,9. Все элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти надёжность (вероятность безотказной работы) прибора.

Р е ш е н и е По условию задачи создадим события:

H_0-оба регулятора вышли из строя,

H_1-работает только первый регулятор (второй вышел из строя),

H_2-работает только второй регулятор (первый вышел из строя),

H_3-работают оба регулятора.

А- безотказная работа прибора:

$$A=AH_0+ AH_1+ AH_2+ AH_3.$$

По условию имеем следующие вероятности гипотез и условные вероятности события А при данных гипотезах:

$P(H_0)=(1-0{,}95)\cdot(1-0{,}9)=0{,}005$, $P(H_1)=0{,}95\cdot(1-0{,}9)=0{,}095$, $P(H_2)=0{,}05\cdot 0{,}9=0{,}045$, $P(H_3)=0{,}95\cdot 09=0{,}855$

Контроль: сумма вероятностей гипотез должна быть равной единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

В нашем примере:
0,005+0,095+0,045+0,855=1.

Условные вероятности событий
$P(A/H_0)=1-0{,}2=0{,}8$, $P(A/H_1)=1-0{,}1=0{,}9$, $P(A/H_2)=1-0{,}2=0{,}8$, $P(A/H_3)=1-0{,}02=0{,}98$.

Вероятность безотказной работы прибора вычислим с помощью формулы полной вероятности:

$$P(A)= \sum_{i=0}^{3} P(H_i) \cdot P(A / H_i),$$

т.е.
$P(A)=0{,}005 \cdot 0{,}8+0{,}095 \cdot 0{,}9+0{,}045 \cdot 0{,}8+0{,}855 \cdot 0{,}98=0{,}9634.$

Полученная вероятность безотказной работы прибора $P(A)=0{,}9634$ близка к единице, поэтому можно сделать вывод о надёжности этого прибора.

П р и м е р 2 Прибор собран из 40% высококачественных деталей и 60% обычного качества. Надёжность прибора, собранного из высококачественных деталей равна 0,95, а из деталей обычного качества его надёжность равна 0,7. Прибор работал безотказно в течение некоторого времени t. Найти вероятность того, что он был собран из высококачественных деталей.

Р е ш е н и е

По условию задачи создадим события:
A-прибор безотказно работал время t,
H_1-прибор собран из высококачественных деталей,
H_2-прибор собран из деталей обычного качества.
Вычислим вероятности гипотез H_1 и H_2:

$P(H_1)=\dfrac{40\%}{100\%}=0{,}4$, $P(H_2)=\dfrac{60\%}{100\%}=0{,}6$.

Условные вероятности безотказной работы прибора за время t при условии, что прибор собран или из высококачественных деталей или из деталей обычного качества, соответственно равны:
$P(A/H_1)=0{,}95$, $P(A/H_2)=0{,}7$

По формуле полной вероятности вычислим вероятность безотказной работы прибора:

$$P(A)= \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A / H_i),$$

т.е.

$$P(A)=0{,}4 \cdot 0{,}95+0{,}6 \cdot 0{,}7=0{,}8.$$

По формуле Байеса найдём вероятность того, что прибор был собран из высококачественных деталей:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)},$$

т.е.

$$P(H_1/A)=\frac{0.4 \cdot 0.95}{0.8}=0{,}475.$$

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.,»Высш.школа»,1980. Задачи 91-96,98-102.